

ASR1 – TD2 : Calcul booléen

{ Andreea.Chis, Matthieu.Gallet, Bogdan.Pasca } @ens-lyon.fr
25 et 26 Septembre 2008

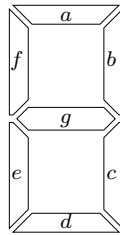
1 Algèbres booléennes

1. Donnez une définition d'une algèbre de Boole.
2. Soit A un ensemble non vide quelconque. Montrez que $(\mathcal{P}(A), A, \emptyset, \cup, \cap, C_A)$ est une algèbre de Boole¹.
3. Énoncez et démontrez toutes les identités booléennes que vous connaissez.
4. On peut noter le « et » par \cdot ou \wedge , le « ou » par $+$ ou \vee . Discutez ces notations et la dualité de toute chose. Faites l'autocritique de vos conventions de parenthésage.
5. En technologie CMOS (*complementary metal-oxide-semiconductor*) on a uniquement les briques de bases suivantes :
 - l'inverseur : $\text{NOT}(x) = \bar{x}$;
 - le non-et : $\text{NAND}(x_1, \dots, x_n) = \overline{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$;
 - le non-ou : $\text{NOR}(x_1, \dots, x_n) = \overline{x_1 + \dots + x_n}$.
 Écrivez les expressions précédentes pour les implanter en CMOS.
6. Rappelez ce qu'est un littéral, un monôme (parfois appelé aussi un minterme), un monal (ou maxterme), un polynôme.
7. Rappelez ce qu'est un monôme canonique (parfois appelé minterme complet).
8. Quelle est la différence entre une fonction booléenne et une expression booléenne ?
9. Rappelez les théorèmes de Shannon.
10. Mettez sous formes disjonctive et conjonctive les expressions suivantes. Comment les construire dans le cas général ? Quel est leur intérêt ? Quelle est leur taille ? Pour une fonction booléenne donnée, laquelle choisir a priori ?
 - $(x \cdot y) + (x \cdot (z + t))$;
 - $(x + y) \cdot (x + (z \cdot t))$;
 - $(x \cdot y \cdot \bar{t}) + (y \cdot t)$;
 - $(x \cdot y \cdot \bar{t}) + (\overline{y \cdot t})$.
11. Dessinez un OBDD. Comment construit-on une expression booléenne à partir de ce graphe ?

2 Mise en œuvre : l'afficheur 7 segments

1. Combien de segments a l'afficheur 7 segments ?

¹Mathworld définit une algèbre de Boole comme "the partial order on subsets defined by inclusion".



2. Combien de bits faut-il pour coder un chiffre de 0 à 9 en binaire ? On complètera avec un afficheur éteint.
3. Dessinez les 10 chiffres dans cet afficheur et définissez la fonction booléenne à implémenter pour décoder et afficher un chiffre.
4. Traduisez-la sous forme d'expression booléenne et d'arbre de décision.
5. Minimisez l'expression booléenne ou l'OBDD, au choix.
6. Comment optimiser encore ?
7. *Bonus* : Faites de même pour un afficheur 7 segments affichant un chiffre hexadécimal (0-9, A-F).